第　1　問

$0 \leqq \alpha \leqq \beta$ をみたす実数 α, β と，2 次式 $f(x) = x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$ について，

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 1$$

が成立しているとする。このとき定積分

$$S = \int_{0}^{\alpha} f(x)\,dx$$

を α の式で表し，S がとりうる値の最大値を求めよ。

第　2　問

白黒2種類のカードがたくさんある。そのうち4枚を手もとにもっているとき，次の操作(**A**)を考える。

(**A**)　手持ちの4枚の中から1枚を，等確率 $\frac{1}{4}$ で選び出し，それを違う色のカードにとりかえる。

最初にもっている4枚のカードは，白黒それぞれ2枚であったとする。以下の(1)，(2)に答えよ。

(1)　操作(**A**)を4回繰り返した後に初めて，4枚とも同じ色のカードになる確率を求めよ。

(2)　操作(**A**)を n 回繰り返した後に初めて，4枚とも同じ色のカードになる確率を求めよ。

第　3　問

座標平面上の3点A$(1, 0)$，B$(-1, 0)$，C$(0, -1)$に対し，

$$\angle \mathrm{APC} = \angle \mathrm{BPC}$$

をみたす点Pの軌跡を求めよ。ただしP$\neq$A，B，Cとする。

第　4　問

p を自然数とする。次の関係式で定められる数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を考える。

$$\begin{cases} a_1 = p, \ \ b_1 = p + 1 & \\ a_{n+1} = a_n + pb_n & (n = 1, 2, 3, \cdots) \\ b_{n+1} = pa_n + (p + 1)b_n & (n = 1, 2, 3, \cdots) \end{cases}$$

(1)　$n = 1, 2, 3, \cdots$ に対し，次の 2 つの数がともに p^3 で割り切れることを示せ。

$$a_n - \frac{n(n-1)}{2}p^2 - np, \qquad b_n - n(n-1)p^2 - np - 1$$

(2)　p を 3 以上の奇数とする。このとき，a_p は p^2 で割り切れるが，p^3 では割り切れないことを示せ。