第　1　問

3 辺の長さが a と b と c の直方体を，長さが b の 1 辺を回転軸として 90° 回転させるとき，直方体が通過する点全体がつくる立体を V とする。

(1)　V の体積を a，b，c を用いて表せ。

(2)　$a + b + c = 1$ のとき，V の体積のとりうる値の範囲を求めよ。

第　2　問

(1)　すべての自然数 k に対して，次の不等式を示せ。

$$\frac{1}{2(k+1)} < \int_0^1 \frac{1-x}{k+x}\,dx < \frac{1}{2k}$$

(2)　$m > n$ であるようなすべての自然数 m と n に対して，次の不等式を示せ。

$$\frac{m-n}{2(m+1)(n+1)} < \log\frac{m}{n} - \sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k} < \frac{m-n}{2mn}$$

第　3　問

2つの箱LとR，ボール30個，コイン投げで表と裏が等確率$\frac{1}{2}$で出るコイン1枚を用意する。xを0以上30以下の整数とする。Lにx個，Rに$30-x$個のボールを入れ，次の操作(#)を繰り返す。

(#)　箱Lに入っているボールの個数をzとする。コインを投げ，表が出れば箱Rから箱Lに，裏が出れば箱Lから箱Rに，$K(z)$個のボールを移す。ただし，$0 \leqq z \leqq 15$のとき$K(z)=z$，$16 \leqq z \leqq 30$のとき$K(z)=30-z$とする。

m回の操作の後，箱Lのボールの個数が30である確率を$P_m(x)$とする。たとえば$P_1(15)=P_2(15)=\frac{1}{2}$となる。以下の問(1)，(2)，(3)に答えよ。

(1)　$m \geqq 2$のとき，xに対してうまくyを選び，$P_m(x)$を$P_{m-1}(y)$で表せ。

(2)　nを自然数とするとき，$P_{2n}(10)$を求めよ。

(3)　nを自然数とするとき，$P_{4n}(6)$を求めよ。

第　4　問

O を原点とする座標平面上の曲線

$$C: \quad y = \frac{1}{2}x + \sqrt{\frac{1}{4}x^2 + 2}$$

と，その上の相異なる 2 点 $P_1(x_1,\ y_1)$，$P_2(x_2,\ y_2)$を考える。

(1) $P_i\ (i = 1,\ 2)$を通る x 軸に平行な直線と，直線 $y = x$ との交点を，それぞれ $H_i\ (i = 1,\ 2)$とする。このとき$\triangle OP_1H_1$と$\triangle OP_2H_2$の面積は等しいことを示せ。

(2) $x_1 < x_2$ とする。このとき C の $x_1 \leqq x \leqq x_2$ の範囲にある部分と，線分 P_1O，P_2O とで囲まれる図形の面積を，y_1，y_2 を用いて表せ。

第　5　問

Cを半径1の円周とし，AをC上の1点とする。3点P, Q, RがAを時刻$t=0$に出発し，C上を各々一定の速さで，P, Qは反時計回りに，Rは時計回りに，時刻$t=2\pi$まで動く。P, Q, Rの速さは，それぞれm, 1, 2であるとする。(したがって，QはCをちょうど一周する。)ただし，mは$1 \leqq m \leqq 10$をみたす整数である。△PQRがPRを斜辺とする直角二等辺三角形となるような速さmと時刻tの組をすべて求めよ。

第　6　問

四面体OABCにおいて，4つの面はすべて合同であり，$\mathrm{OA}=3$，$\mathrm{OB}=\sqrt{7}$，$\mathrm{AB}=2$であるとする。また，3点O，A，Bを含む平面をLとする。

(1) 点Cから平面Lにおろした垂線の足をHとおく。$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$を$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$と$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$を用いて表せ。

(2) $0<t<1$をみたす実数tに対して，線分OA，OB各々を$t:1-t$に内分する点をそれぞれP_t，Q_tとおく。2点P_t，Q_tを通り，平面Lに垂直な平面をMとするとき，平面Mによる四面体OABCの切り口の面積$S(t)$を求めよ。

(3) tが$0<t<1$の範囲を動くとき，$S(t)$の最大値を求めよ。